Tag der Mathematik
2020
Uni Heidelberg - PH Heidelberg

Teamwettbewerb Mittelstufe

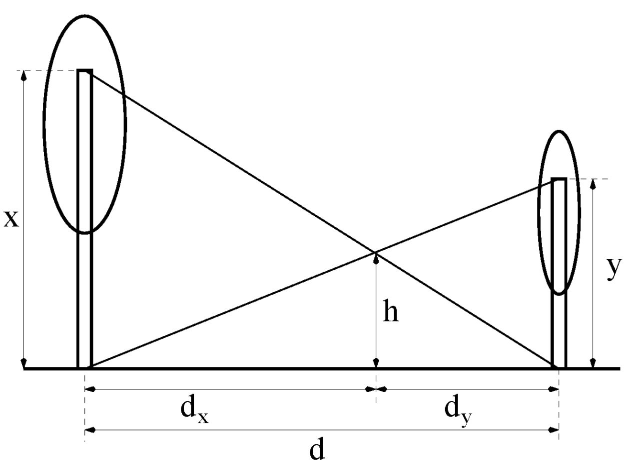
Lösungsvorschläge

Aufgabe 1.

In der Figur sind 13 Dreiecke enthalten.

Aufgabe 2.

Die Veranstalter brauchen sich keine Sorgen zu machen! Egal, wie weit die Bäume voneinander entfernt stehen: dort, wo sich die Bänder kreuzen, sind sie 2,40 Meter über der Erde. Die folgende Skizze definiert die Bezeichnungen für die Lösung.



Nach dem Strahlensatz gilt:

$$\frac{x}{d} = \frac{h}{d_y} \tag{1}$$

$$\frac{y}{d} = \frac{h}{d_x} \tag{2}$$

außerdem ist

$$d_x + d_y = d. \tag{3}$$

Aus (1) und (2) ergibt sich

$$\frac{x}{y} = \frac{d_x}{d_y}, \tag{4}$$

insbesondere ist

$$\frac{d_x}{d_y} = \frac{6\text{ m}}{4\text{ m}} = \frac{3}{2}.$$

Das liefert $\frac{3}{2}d_y + d_y = d$, also $d_y = \frac{2}{5}d$. In (1) eingesetzt ergibt sich

$$\frac{x}{d} = \frac{h}{\frac{2}{5}d}$$

und damit $h = \frac{2}{5}x = 2,4$ m. Selbst wenn man davon ausgeht, dass die Schmuckbänder in Wirklichkeit noch ein wenig durchhängen, ist das völlig ausreichend dafür, dass noch ein Mensch darunter durchgehen kann

Aufgabe 3.

Nehmen wir an, die Gäste kennen jeweils verschiedene Anzahlen von Gästen. Da es 31 Gäste sind, kann ein Gast einen, zwei, . . . oder 31 Gäste kennen. Dies sind 31 Möglichkeiten. Somit muss jede dieser 31 Möglichkeiten (genau einmal) auftreten. Es gibt also einen Gast, der genau einen Gast kennt, und einen Gast, der 31 Gäste, d. h. alle Gäste kennt. Dies ist aber nicht möglich, da diese zwei Gäste sich entweder kennen – dann kennt aber der erste Gast mindestens zwei Gäste – oder sich nicht kennen, dann kennt aber der zweite Gast nicht alle Gäste. Unsere Annahme muss also falsch sein und daher gibt es zwei Gäste, die die gleiche Zahl von Gästen kennen.

Aufgabe 4.

Alle natürlichen Zahlen haben diese interessante Eigenschaft. Betrachten wir eine beliebige natürliche Zahl m. Dann liegt m zwischen den Quadratzahlen n^2 und $(n+1)^2$, das heißt, $n^2 \leq m < (n+1)^2$. Also kann man die gewünschte Zahl wie folgt berechnen:

$$\begin{aligned} m-(m-n)^2((n+1)^2-m) &= m-(mn^2+2mn+m-m^2-n^4-2n^3-n^2+mn^2) \\ &= (-2mn^2-2mn)+m^2+(n^4+2n^3+n^2) \\ &= -2m(n^2+n)+m^2+(n^2+n)^2 \\ &= ((n^2+n)-m)^2 \end{aligned}$$

Also ist diese Zahl für alle natürlichen Zahlen eine Quadratzahl.

Aufgabe 5.

Es ist $1001 = 7 \cdot 11 \cdot 13 = 11 \cdot 91$, so dass die Zahl $abcabc = 1001 \cdot abc$ in jedemFall durch 91 teilbar ist. Vergleichen wir unser sechsstelliges Palindrom $abccba$ damit, so erhalten wir

$$abccba = abcabc + 100(c-a) + 1(a-c) = 99(c-a) + 91 \cdot 11 \cdot abc.$$

Also ist $abccba$ genau dann durch 91 teilbar, wenn $99(c-a)$ durch 91 teilbar ist. Da $99 = 9 \cdot 11$ und $91 = 7 \cdot 13$ teilerfremd sind, ist dies genau dannder Fall, wenn 91 ein Teiler von $c-a$ ist. Weil c und a Ziffern sind, folgt,dass $abccba$ genau dann durch 91 teilbar ist, wenn $c-a=0$, also $c=a$ gilt. Somit sind genau die 90 sechsstelligen Palindrome der Form $abaaba$ durch 91 teilbar.

Aufgabe 6.

Es gibt genau drei Lösungen der Gleichung

$$n! + 3 = m^k,$$

nämlich für $n=1$, $m=k=2$, für $n=3$, $m=3$, $k=2$ und für $n=4$, $m=k=3$. Zuerst rechnen wir die linke Seite für kleine n aus:

$$\begin{aligned} 1!+3 &= 1+3 = 4 = 2^2 \\ 2!+3 &= 2+3 = 5 \\ 3!+3 &= 6+3 = 9 = 3^2 \\ 4!+3 &= 24+3 = 27 = 3^3 \\ 5!+3 &= 120+3 = 123 = 3 \cdot 41. \end{aligned}$$

Hier sehen wir direkt, dass sich für $n \in \{1, 3, 4\}$ tatsächlich wie behauptet Lösungen ergeben. Außerdem lassen sich 5 als Primzahl und 123 als Produkt zweier verschiedener Primzahlen nicht als Potenzen m^k mit einem $k \geq 2$ schreiben.
Für $n \geq 6$ kommen in $n!$ mindestens die beiden Faktoren 3 und 6 vor, die Zahl $n!$ ist also durch $3 \cdot 6 = 18$ und damit insbesondere durch 9 und durch 3 teilbar. Die gesamte linke Seite $n! + 3$ ist dann durch 3, aber nicht durch 9 teilbar. Hätten wir eine Lösung $n! + 3 = m^k$, dann muss mit der linken Seite auch die rechte Seite m^k durch 3 teilbar sein. Da 3 eine Primzahl ist, folgt dann, dass auch m selbst durch 3 teilbar ist. Ist dann $k \geq 2$, so ist $m^k = m^2 \cdot m^{k-2}$ durch 9 teilbar im Widerspruch dazu, dass die linke Seite $n! + 3$ nicht durch 9 teilbar ist. Für $n \geq 6$ lässt sich $n! + 3$ also nicht als Potenz m^k mit einem $k \geq 2$ darstellen.